Solution 6 :

1°/ F est définie sur $\mathbf{R}$ car la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^4+1}}$ est continue sur $\mathbf{R}$.

F est impaire si et seulement si $\forall x \in \mathbf{R}$, $F(-x)+F(x)=0$

Soit $K(x)=F(-x)+F(x)$

K est dérivable sur $\mathbf{R}$ comme somme et composée des fonctions dérivables sur $\mathbf{R}$.

$\forall x \in \mathbf{R}$, $K'(x)=-F'(-x)+F'(x)$

Or $F'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^4+1}}$ d'où $K'(x)=\frac{-1}{\sqrt{x^4+1}}+\frac{1}{\sqrt{x^4+1}}=0$

Donc $\forall x \in \mathbf{R}$, $K'(x)=0$ d'où K est une fonction constante.

Or $K(0)=2F(0)=0$ donc $\forall x \in \mathbf{R}$, $K(x)=0 \Rightarrow F(-x)+F(x)=0$

ce qui prouve que F est une fonction impaire.

2°/ On a : $\forall x \in \mathbf{R}$, $F'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^4+1}}>0$

d'où F est une fonction strictement croissante sur $\mathbf{R}$.

3°/a) On a : $\forall t \in \mathbf{R}^*$, $t^4+1 \geq t^4 \Rightarrow \sqrt{t^4+1} \geq t^2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{t^4+1}} \leq \frac{1}{t^2}$

en particulier pour tout $t \geq 1$ on a : $\frac{1}{\sqrt{t^4+1}} \leq \frac{1}{t^2}$

b) Soit $x \geq 1$, $F(x)=\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t^4+1}}+\int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t^4+1}}=F(1)+\int_1^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$

or pour tout $t \geq 1$, on a : $\frac{1}{\sqrt{t^4+1}} \leq \frac{1}{t^2} \Rightarrow \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t^4+1}} \leq \int_1^x \frac{1}{t^2}dt$

$\int_1^x \frac{1}{t^2}dt=\left[\frac{-1}{t}\right]_1^x=\frac{-1}{x}+1$ or pour tout $x \geq 1$, $1-\frac{1}{x} \leq 1$

d'où $\int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t^4+1}} \leq 1 \Rightarrow F(1)+\int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t^4+1}} \leq F(1)+1$

$\Rightarrow F(x) \leq F(1)+1 \Rightarrow F(x)-F(1) \leq 1$.

Conclusion : $\forall x \geq 1$, $F(x)-F(1) \leq 1$.

c) F est une fonction strictement croissante

et $\forall x \in [1,+\infty[$, $F(x) \leq F(1)+1$ (F est majorée sur $[1,+\infty[$ par $F(1)+1$)

donc F admet une limite finie l en $+\infty$.